

1.) a ist ein Randpunkt von $Df = [-1; 2]$, also $a \in \{-1; 2\}$

2.) a ist ein Nichtdifferenzierbarkeitspunkt von f , also $a = 0$

3.) a liegt im inneren von Df und f ist in a differenzierbar, dann gilt aber $f'(a) = 0$, also $a = 1$

Ein Vergleich der Funktionswerte

a	-1	0	1	2
$f(a)$	-2	0	-2	2

liefert $p = \pm 1$ und $q = 2$; es ist also $Wf = [-2; 2]$.

8.13 Satz

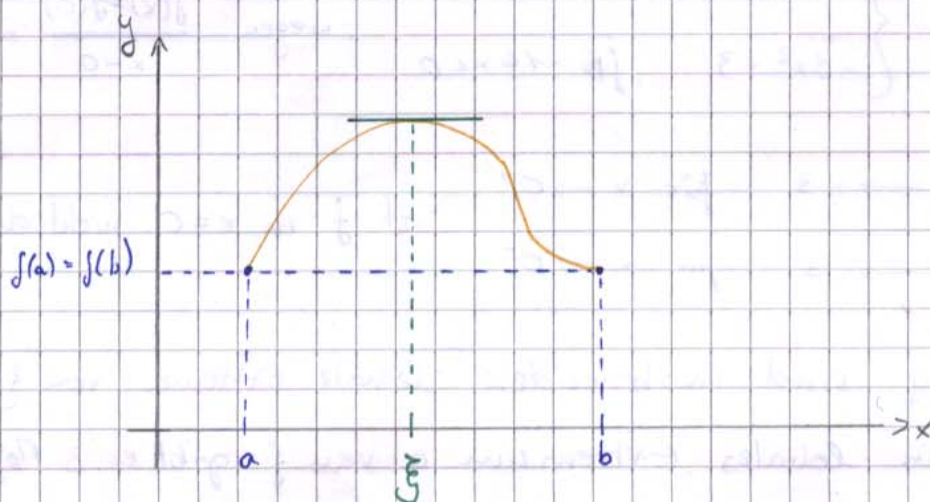
20.04.05

Sei $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige und auf $]a; b[$ differenzierbare Funktion. Dann gilt:

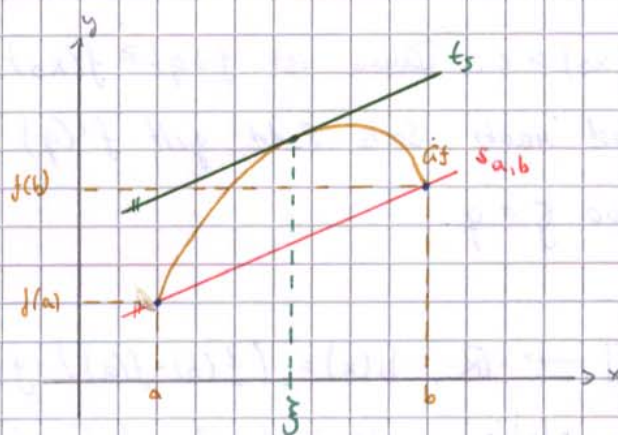
1.) (Satz von Rolle; Michel Rolle (1652-1719))

Ist $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in]a; b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

(Insbesondere liegt zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion stets mindestens eine Nullstelle der Ableitung)



2.)



(Mittelwertsatz der Differenzialrechnung) Es existiert ein $\xi \in]a; b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ bzw. $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$

(Die Steigung der Sehante $s_{a,b}$ zwischen zwei Punkten einer differenzierbaren Funktion entspricht der Steigung der Tangente t_{ξ} an einer geeigneten Zwischenstelle ξ .)

3.) (Verallgemeinerung Mittelwertsatz) Es existiert ein $\xi \in]a; b[$ mit $(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$.

Beweis: 1.) Nach dem Satz von Weierstraß besitzt die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein globales Minimum p und ein globales Maximum q mit $W_f = [f(p); f(q)]$, sei $c = f(a) = f(b)$

Fall 1: Für alle $x \in [a; b]$ ist $f(x) = c$.

Damit ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a; b]$, wähle $\xi \in]a; b[$ beliebig.

Fall 2: Es gibt ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) \neq c$

Fall 2.1: $f(x_0) < c$. Dann ist $f(p) \leq f(x_0) < c$, also $p \in]a; b[$, und nach Satz 8.11 gilt $f'(p) = 0$.

Man wähle also $\xi = p$

Fall 2.2: $f(x_0) > c$. Dann ist $f(q) \geq f(x_0) > c$, also $q \in]a; b[$ und nach Satz 8.11 gilt $f'(q) = 0$. Man wähle also $\xi = q$.

3.) Sei $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$.
Damit ist h stetig und auf $]a; b[$ differenzierbar mit
 $h'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x)$ für alle
 $x \in]a; b[$. ferner gilt $h(a) = (f(b) - f(a))g(a) -$
 $-(g(b) - g(a)) \cdot f(a) = f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a) =$
 $= (f(b) - f(a)) \cdot g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) = h(b)$

Nach Satz von Rolle gibt es also ein $\xi \in]a; b[$ mit
 $h'(\xi) = 0$, also $(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$

2.) Speziell $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$, mit $g'(x) = 1$ für
alle $x \in]a; b[$ ergibt sich aus 3.) also $(f(b) - f(a)) \cdot 1 =$
 $= (b - a) \cdot f'(\xi)$, wegen $b - a \neq 0$ also

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

8.14 Beispiele

1.) (H 99 I 2) Man zeige $|\sin^3 b + \cos b - \sin^3 a - \cos a| \leq 4 \cdot |b - a|$
für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, wir können $a < b$
annehmen. Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x + \cos x$,
ist als Summe und Komposition differenzierbarer
Funktionen differenzierbar mit $f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x - \sin x$
für alle $x \in [a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz gibt
es ein $\xi \in]a; b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

bzw. $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$, und man erhält

$$|\sin^3 b + \cos b - \sin^3 a - \cos a| = |f(b) - f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |b-a|$$

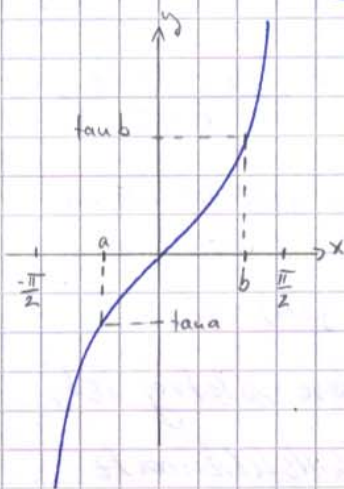
$$\text{mit } |f'(\xi)| = |3 \sin^2 \xi \cdot \cos \xi - \sin \xi| \leq 3 \cdot \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1}^2$$

$$\cdot \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1} \leq 3 + 1 = 4, \text{ also}$$

$$|\sin^3 b + \cos b - \sin^3 a - \cos a| \leq 4 \cdot |b-a|$$

2.) (703 III 3)

a) Man zeige $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$ für alle $x, y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



Seien $a, b \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit $a < b$; dann ist $\tan|_{[a,b]}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar

mit $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ für alle $x \in]a, b[$. Nach dem

Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\tan' \xi = \frac{\tan b - \tan a}{b - a} \quad \text{bzw.}$$

$$\tan b - \tan a = \frac{1}{\cos^2 \xi} \cdot (b-a) \text{ und man erhält}$$

$$|\tan b - \tan a| = \frac{1}{\cos^2 \xi} \cdot |b-a| \geq |b-a| \quad (\text{wegen } 0 < \cos^2 \xi \leq 1)$$

b) Man beweise $\tan x > x$ für alle $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Sei $b \in]0; \frac{\pi}{2}[$, dann ist $\tan|_{[0,b]}$ stetig und auf $]0, b[$ differenzierbar mit $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 1$ für alle $x \in]0, b[$.

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]0, b[$ mit

$$\tan' \xi = \frac{\tan b - \tan 0}{b - 0} \quad \text{bzw.} \quad \tan b = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 \xi}}_{> 1} \cdot \underbrace{b}_{> 0} > b$$

c) Gibt es zwei verschiedene $x, y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit

$|\tan x - \tan y| = |x - y|$. Wir nehmen zum Widerspruch

an, es gäbe $a, b \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit $a < b$ und $|\tan b - \tan a| = |b - a|$; nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]a, b[$

mit $\tan' \xi = \frac{\tan b - \tan a}{b - a}$, also $\frac{1}{\cos^2 \xi} = \left| \frac{\tan b - \tan a}{b - a} \right| = 1$

also $\cos^2 \xi = 1$, wegen $\xi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ also $\xi = 0$. Es ist also

$a < 0 < b$ mit $\underbrace{|\tan b - \tan a|}_{>0} = \underbrace{\tan b}_{>0} + \underbrace{(\tan(-a))}_{>0} \underset{b)}{>} b + (-a) = |b - a|$,

ein Widerspruch!

3.) (H 04 I 4) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $0 = f(0) < f(1)$ und $f'(0) < 0$. Man zeige, daß es ein $x_0 > 0$ mit $f'(x_0) = 0$ gibt.



Wegen $0 > f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} f(h)$ gibt es ein $h \in]0, 1[$

mit $\frac{1}{h} f(h) < 0$, also $f(h) < 0$.

Da f als differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, gibt es wegen $f(h) < 0 < f(1)$ nach dem Nullstellensatz eine Zwischenstelle $\xi \in]h, 1[$ mit $f(\xi) = 0$, der Satz von Rolle liefert dann zwischen den Nullstellen 0 und ξ (mit $0 < h < \xi$) von f eine Nullstelle $x_0 \in]0, \xi[$ von f' , also $f'(x_0) = 0$.

8.15 Satz

Sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:

a) $f'(x) = 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist eine konstante Funktion

b) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist monoton wachsend

$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist monoton fallend

- c) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend
 $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend

In c) „ $\Leftarrow$ “ nicht unbedingt gelten.

Beweis:

a) „ $\Leftarrow$ “ Sei $f(x) = c$ für alle $x \in I$, dann gilt
 $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$

„ $\Rightarrow$ “ Sei $a \in I$ mit $c = f(a)$ und $a \neq x \in I$. Da
 I ein Intervall ist, gilt $[a, x] \subseteq I$ (bzw. $[x, a] \subseteq I$).
 Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen
 a und x mit $f(x) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0} \cdot (x - a) = 0$,
 es ist also $f(x) = f(a) = c$. Damit ist f
 eine konstante Funktion

b) „ $\Leftarrow$ “ Sei f monoton wachsend sowie $x \in I$, für
 alle $h \neq 0$ mit $x+h \in I$ gilt $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$
 und damit

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

„ $\Rightarrow$ “ Sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ sowie $a, b \in I$
 mit $a < b$, da I ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subseteq I$.
 Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]a, b[$
 mit $f(b) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(b-a)}_{> 0} \geq 0$, also
 $f(a) \leq f(b)$.